LA FUNCIÓN LINEAL Y SUS APLICACIONES ECONÓMICAS.

MSc. Adriana Delgado Landa[1], Lic. Ana María González Moreno[2], MSc. Teresa Pérez Sosa[3], Manuel Domínguez Alejo[4]

1. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.

2. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.

3. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.

4. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.

CD de Monografías 2012

Resumen.

Son muchas las situaciones relacionadas con fenómenos económicos que requieren ser expresados a través de una relación funcional entre dos variables. En particular la función lineal posee un elevado número de aplicaciones económicas que deben ser explicadas en su mayoría en las clases de matemáticas. Las carreras de Licenciatura en Economía, Contabilidad y Turismo tienen dentro de la asignatura Matemática Superior un tema relacionado con funciones y sus aplicaciones a la economía. Es por ello que este trabajo tiene como objetivo presentar 10 problemas económicos que requieren para su solución la utilización de la función lineal y de conceptos como ganancia, costo, ingreso, oferta, demanda, precio, equilibrio de mercado.

Palabras claves*: función lineal, problemas económicos.*

Introducción.

La enseñanza de la matemática en carreras de Ciencias Económicas debe estar sujeta a la utilización en las clases de ejemplos de aplicaciones económicas concretos. De esta manera los contenidos impartidos estimulan y propician la motivación y la independencia en el pensamiento creador del estudiante. (Delgado y Marrero, 2008)

En particular el tema de funciones, pues constituye una herramienta fundamental para el análisis, la cuantificación y la modelización de fenómenos económicos y sociales.

Esta ponencia tiene como objetivo general mostrar diversos ejemplos de aplicaciones económicas de la función lineal. Se trabajan fundamentalmente funciones de demanda, oferta, costo, ingreso, ganancia. Se hacen análisis del punto de equilibrio de mercado (intersección entre dos funciones), interpretación de la pendiente, obtención de la ecuación de demanda (ecuación de la recta), representación y análisis de gráficos.

Desarrollo

Las carreras de Ciencias Económicas, tales como Licenciatura en Economía, Licenciatura en Contabilidad y Finanzas y Licenciatura en Turismo contemplan dentro de la asignatura Matemática Superior un tema sobre funciones y sus aplicaciones económicas. No es un secreto que los estudiantes terminan la enseñanza media sin apropiarse adecuadamente del concepto función. Es por ello que cuando inician sus estudios universitarios presentan serias dificultades al respecto.

Tal y como plantea Álvarez (2011), la comprensión del concepto función no se reduce a la reproducción de su definición ni tampoco a la realización de una serie de procedimientos para calcular el valor de una función para un argumento dado, para determinar sus ceros o la monotonía de la función. Este reduccionismo puede llevar a que los estudiantes no comprendan que el objeto función ha sido construido de manera expresa para el estudio de los fenómenos sujetos a cambio y que en lugar de trabajar con variables, lo hagan con incógnitas.

El concepto función es uno de los más básicos en matemáticas y resulta esencial para el estudio del cálculo. Por ello se debe insistir en la importancia de las funciones en la Economía. En especial el estudio de la función lineal dado su gran aplicación a situaciones económicas.

La función lineal debe analizarse, dándole interpretación económica a la pendiente y la intersección, en las distintas funciones lineales económicas que se utilizan, tales como oferta, demanda, costos, ingreso, ganancia y producción. (Haeussler, 1997; Pindyck y Rubinfeld, 1997)

Para el buen desarrollo de las clases es importante una selección adecuada de los métodos a utilizar. Como es conocido, en cualquier contenido matemático que sea objeto de estudio, cuando se introducen problemas de aplicación, aumenta la dificultad en cuanto a la comprensión por parte de los estudiantes. Por esa razón, en las conferencias se utiliza, preferentemente, la exposición problémica y la conversación heurística, en dependencia de la complejidad del problema que se esté resolviendo. Si el problema es de difícil comprensión se utiliza la exposición problémica, en los otros casos se emplea la conversación heurística. (Delgado y Hernández, 2009).

Se debe tener en cuenta que la habilidad para resolver problemas matemáticos vinculados con situaciones económicas de aplicación de la función lineal, no se forma a partir de la repetición de acciones ya elaboradas previamente, sin atender a cómo se han asimilado y el nivel de significación que éstas tienen para los estudiantes atendiendo a sus experiencias, su disposición hacia la actividad; de ahí la necesidad de enfocar como parte de la formación de habilidades el sistema de conocimientos (conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos) a partir de situaciones problémicas.

Esta habilidad implica también las habilidades docentes, lógicas o intelectuales; que guían el proceso de búsqueda y planteamiento de la solución. Así se destacan habilidades como identificar, observar, describir, denotar, interpretar, analizar, modelar, calcular, fundamentar, valorar, etc. que están presentes en la comprensión y búsqueda de vías de solución, en su descripción y en la valoración de los resultados.

Ejemplos de aplicación de la función lineal a situaciones económicas

Para aplicar la función lineal a fenómenos económicos, el estudiante tiene que ser capaz de manejar conceptos como demanda y oferta, precio por unidad, relación entre precio y cantidad de producto, entender el significado de costo, ingreso ganancia, producción, consumo, entre otros. El profesor debe hacer un resumen de los principales aspectos teóricos necesarios para la enseñanza de la función lineal aplicada a la economía.

A continuación se exponen 10 ejemplos de aplicación de la función lineal a situaciones económicas. Estos problemas resultan de mucha utilidad para los estudiantes de las Licenciaturas en Economía, Contabilidad y Turismo. Este es el momento en que los estudiantes aplican sus conocimientos precedentes a situaciones nuevas para ellos, pero sin dudas interesantes pues están vinculadas con sus especialidades.

1. Determinación de la ecuación de demanda

Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de $ 58,00 por unidad y de 200 unidades si son a $ 51,00 cada uno. Determinar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución:

A partir de esta situación el estudiante para darle solución debe combinar elementos de economía con matemática. Tiene que percibir que la cantidad q y el precio p están relacionados linealmente de modo que p=58 cuando q=100, y p=51 cuando q=200. Estos datos pueden ser representados en un plano de coordenadas q, p por los puntos (100, 58) y (200, 51). Con estos puntos se puede encontrar una ecuación de la recta, que sería la ecuación de demanda: P (q) $= \frac{-7}{100}q + 65$.

2. Determinación de la ecuación de oferta y del tipo de relación entre el precio p y la cantidad q

Suponga que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 pares cuando el precio es de $35,00 (pesos por par) y 35 pares cuando el precio es de $30,00.

a) Determinar la ecuación de oferta suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionados linealmente.

b) Cuando se incrementa el precio ¿qué le ocurre a las cantidades ofrecidas?

Solución:

a) Para determinar la ecuación de oferta, el algoritmo es similar al del ejercicio anterior.

(50; 35) y (35; 30) $\quad m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{30-35}{35-50} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$

$$p - p_1 = m(q - q_1)$$

$$p - 35 = \frac{1}{3}(q - 50)$$

$$p = \frac{1}{3}q - \frac{50}{3} + 35$$

$$p(q) = \frac{1}{3}q - \frac{155}{3}$$

Ecuación de oferta

b) A medida que el precio se incrementa las cantidades ofrecidas también aumentan, pues tienen una relación directamente proporcional.

3. Determinación de la ecuación de costo y determinación del valor del costo total (variable dependiente) dada una cantidad específicas de unidades (variable independiente)

Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es de $40 pesos y el de 20 unidades es $70. Si el costo C está relacionado linealmente con el producto q, determine una ecuación lineal que relacione p con q. Encuentre el costo de producir 35 unidades.

Solución:

(10; 40) y (20; 70) $m = \dfrac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \dfrac{70-40}{20-10} = \dfrac{30}{10} = 3$

$$p - p_1 = m(q - q_1)$$
$$p - 40 = 3(q - 10)$$
$$p = 3q - 30 + 40$$
$$C_q = 3q + 10$$

$$C(35) = 3(35) + 10$$
$$C(35) = 115$$

El costo de producir 35 unidades es de $115,00.

4. Determinación del punto de equilibrio entre el ingreso y el costo. Representación gráfica

Cuando en una industria se producen x toneladas de producto al día, $0 \le x \le 16$, el costo total de producción y el ingreso total en cientos de pesos están dados respectivamente por las ecuaciones C(x)= 3x+12 y I(x)=5x.

a) Halle el punto de equilibrio. Interprete.

b) Represente gráficamente las dos funciones anteriores en un mismo gráfico.

c) ¿Para qué valores de x se producen ganancias y para qué valores de x se producen pérdidas?

Solución:

El estudiante debe percibir que el punto de equilibrio se determina igualando las dos funciones.

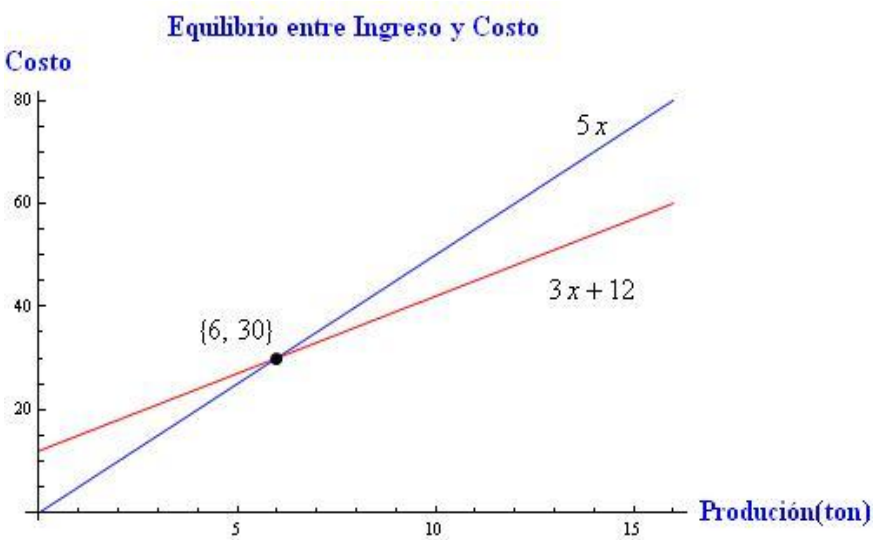
a) I(x)= C(x) C (6)= 3(6)+12

5x= 3x+12 C (6)= 18+12

x= 6 C (6)= 30

El punto de equilibrio es (6; 30), significa que cuando se produce y vende la tonelada número 6, el costo y el ingreso son exactamente iguales ($30,00). En este momento la ganancia es cero.

b) Para representar en un mismo gráfico ambas funciones lineales muchos estudiantes determinan los ceros, sin embargo el cero de la función de costo es negativo. Este gráfico solo tiene sentido para las $x \geq 0$, por lo que los estudiantes representa solo en el primer cuadrante. Dándole valores a las x pueden determinar al menos dos pares ordenados, suficiente para representar una línea recta.



c) El estudiante debe relacionar estas dos funciones con la ganancia de manera que: G(x)= I(x)-C(x), es fácil concluir a través de una inecuación: I(x)-C(x)>o, que se producen ganancias cuando la producción del producto es mayor que 6 toneladas (x>6) y se producen pérdidas cuando es menor que 6. El análisis gráfico también lo demuestra pues la recta que representa el ingreso (la de color azul) se encuentra por encima de la de costo (la de color rojo) a partir del nivel de producción igual a 6 toneladas

5. Determinación de valores en el punto de equilibrio y de la ganancia dado una cantidad específica de unidades

Un fabricante vende un producto a $8 por unidad, vendiendo todo lo que produce. La función de costo total es: C (q)= (22/9) q+5000.

a) Encuentre la producción y el ingreso total en el punto de equilibrio.

b) Encuentre la ganancia cuando son producidas 1800 unidades.

Solución:

a) Es necesario determinar el ingreso total que sería: I=p×q, donde p: precio unitario, q: cantidad de unidades del producto. Sustituyendo quedaría: I (q)=8q. Luego se igualan las funciones de ingreso y costo, resultando: $8q = \frac{22}{9}q + 5000$, desarrollando la ecuación se obtiene el valor de q=900 y evaluando en la función de ingreso: $I(900) = 8 \bullet 900 = 7200$

Se concluye que en el punto de equilibrio la producción es de 900 productos y el ingreso total es de $7200,00. En este momento el fabricante no obtiene ni ganancias ni perdidas (la ganancia es cero).

b) Es necesario determinar la función de ganancia total para luego evaluar en el valor de q dado. Donde G_T: Ganancia total, I_T: Ingreso total, C_T: Costo total.

$$G_T = I_T - C_T$$

$$G_T = 8q - \frac{22}{9}q - 5000$$

$$G_T = \frac{50}{9}q - 5000$$

$$G_T(1800) = \frac{50}{9}1800 - 5000 = 5000$$

Cuando son producidas 1800 unidades la ganancia es de $5000,00

6. Equilibrio de mercado

Suponga que para un producto "A" las ecuaciones de demanda y oferta son las siguientes: $p = -\frac{1}{180}q + 12$ y $p = \frac{1}{300}q + 8$. Determina gráfica y analíticamente el equilibrio de mercado e interprete.

Solución:

El equilibrio de mercado ocurre cuando la demanda y la oferta son iguales.

D (q)= O (q)

$$-\frac{1}{180}q + 12 = \frac{1}{300}q + 8$$

$$\left(-\frac{1}{180}q - \frac{1}{300}q\right) = -4$$

$$q\left(-\frac{1}{180} - \frac{1}{300}\right) = -4$$

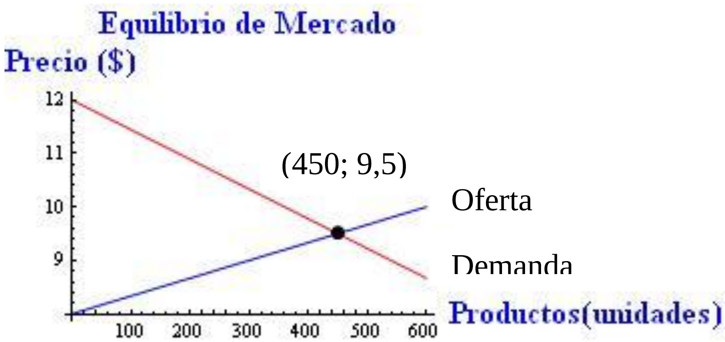
$$q\left(\frac{-5-3}{900}\right) = -4$$

$$q = -4\left(-\frac{900}{8}\right)$$

$$q = 450$$

Si q=450, entonces

$$p(450) = \frac{1}{300}(450) + 8 = 9{,}5$$



El punto de equilibrio es (450; 9,5), significa que cuando el precio del producto A es de \$9,50 las cantidades ofrecidas y las demandadas son exactamente iguales, o sea 450 unidades del producto A. Esta cantidad vacía el mercado. Pues todo lo que los consumidores están dispuestos a comprar es exactamente igual a las cantidades de producto que los vendedores están dispuesto a ofrecer.

7. Determinación del precio de mercado de un producto

Se conocen las curvas de oferta y de demanda de trigo: Q_O= 1800+240p, Q_D= 3550-226p, donde el precio se expresa en pesos por paquete y las cantidades en millones de paquetes al año. ¿Cuál es el precio del paquete de trigo que vacía el mercado?

Solución:

Para determinar el precio del paquete de trigo que vacía el mercado, el estudiante debe recordar que el mercado se vacía cuando la demanda es igual a la oferta o sea cuando todo lo que los consumidores están dispuestos a comprar es exactamente igual a las cantidades de producto que los vendedores están dispuestos a ofrecer. Luego de igualar ambas funciones, se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de p, que es precisamente el precio del producto.

$$Q_O = Q_D \rightarrow 1800+240p = 3550-226p$$
$$240p+266p = 3550-1800$$
$$506p = 1750$$
$$p = \frac{1750}{506} = 3{,}46$$

El precio por paquete de trigo que vacía el mercado es de \$3,46.

8. Modelación de función de costo y determinación de la cantidad de unidades producidas dado un valor del costo

En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un troquel es de \$850,00 y todos los otros costos adicionales son de \$3,00 por unidad producida.

a) Exprese el Costo Total C como una función lineal del número q de unidades producidas.

b) ¿Cuántas unidades son producidas si el costo total es $1600?

Solución:

El estudiante debe modelar, definiendo primeramente la variable independiente q como la cantidad de unidades producidas.

a) C_T (q)= 850+3q

b) Fijan el costo total y piden las cantidades producidas por tanto es necesario sustituir en la función anterior para obtener el valor de q.

C_T (q)= 850+3q
1600= 850+3q

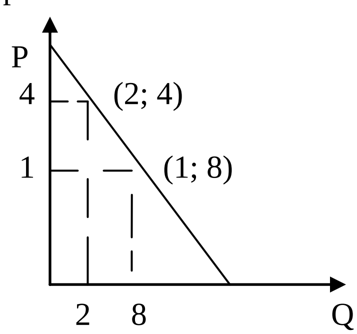
$$\frac{600-850}{3}=q$$

$$q=250$$

El Costo total es de $1600,00 cuando son producidas 250 unidades.

9. Interpretación de la pendiente

La recta muestra la relación entre el precio p de un artículo (en pesos) y la cantidad q de artículos (en miles) que los consumidores comprarán a ese precio. Determina e interprete la pendiente.



Solución:

$$pendiente=\frac{cambioenp}{cambioenq}=\frac{cambiovertical}{cambiohorizontal}$$

$$m=\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1}=\frac{1-4}{8-2}=-\frac{1}{2}$$

La recta desciende de izquierda a derecha. La pendiente es negativa. Significa que por cada unidad que aumenta la cantidad de artículos (miles de artículos) habrá una disminución en el precio de $0,50 (1/2) por artículo.

10. La pendiente como tasa de cambio

Suponga que un fabricante utiliza 100 lbs de materiales para hacer los productos A y B, que requieren de 4 y 2 lbs de materiales por unidad respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de x e y que satisfacen la ecuación 4x+2y= 100, donde x, y≥ 0. Determine la tasa de cambio del nivel de producción B con respecto al de A y represente mediante un gráfico.

Solución:

Se necesita despejar a y → 4x+2y= 100

$$2y = 100 - 4x$$

$$y = \frac{100 - 4x}{2}$$

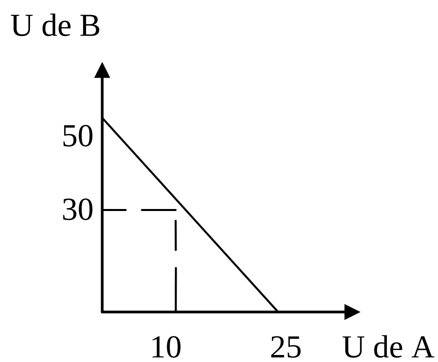
$$y = 50 - 2x$$

La pendiente es -2. Refleja la tasa de cambio del nivel de producción B con respecto al de A.

Ejemplo: Si se produce una unidad adicional de A, se requerirán 4 lbs más de material, resultando 4/2= 2 unidades menos de B.

Para graficar $y = 50 - 2x$ se puede utilizar la intersección (0; 50) y el hecho de que cuando x=10, y=30, también se debe determinar el cero o sea el intersecto con el eje x.

$$0 = -2x + 50$$
$$2x = 50$$
$$x = 25$$



Los niveles de producción están relacionados linealmente.

Conclusiones.

La enseñanza de la matemática en las licenciaturas en Economía, Contabilidad y Turismo debe estar enfocada fundamentalmente a la resolución de problemas económicos.

Muchas situaciones relacionadas con fenómenos económicos tienen un comportamiento lineal, de ahí que existan diversas aplicaciones económicas de la función lineal.

La función lineal puede ser aplicada para:

- Determinar ecuaciones de demanda, oferta y costo que tengan un comportamiento lineal.

- Determinar el punto de equilibrio entre el ingreso y el costo y entre la oferta y la demanda, así como el precio de mercado.

- Determinar la tasa de cambio del nivel de producción de dos productos.

- Analizar gráficamente el comportamiento de funciones de ingreso, costo, ganancia, producción, oferta y demanda.

Bibliografía.

Álvarez, (2011). *El desarrollo de la comprensión matemática: el caso del concepto función.* Conferencia impartida en el marco del XIII Evento Científico Internacional, La enseñanza de la matemática, la estadística y la computación, MATECOMPU 2011 y III congreso internacional ALAMMI 2011.

Delgado y Hernández, (2011). *Las Diferencias Finitas como herramienta para la resolución de problemas.* Convención Internacional de la Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos. Taller COMAT ISBN978-959-16-1399-8

Delgado y Marrero, (2008). *La enseñanza de la matemática I en carreras de ciencias económicas.* Evento Científico Internacional "La enseñanza de la Matemática y la computación" MATECOMPU 2008. Edición Especial de la Revista Atenas. ISBN 978-959-18-0406-8

Haeussler, (1997). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida.* 8va.ed.

Pindyck y Rubinfeld, (1998). *Microeconomía I.* Cuarta Edición. Editorial Félix Varela. La Habana, Cuba.